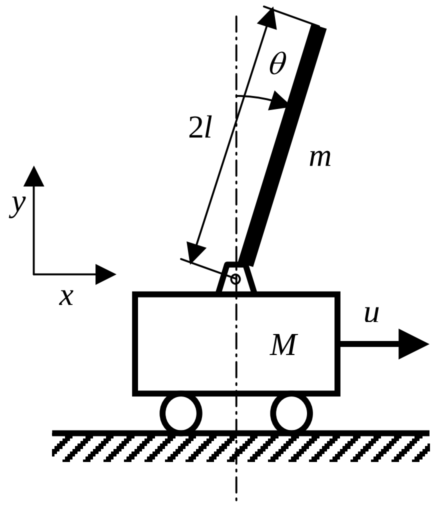
倒立振子の制御

［問題設定］

右図の倒立振子において、台車にかける力 u [N]を操作して、台車の位置 $x=0$ [m]、振子の傾き　$\theta=0$ [rad]で静止させたい。



振子：均質な細長い剛体棒
　長さ $2l$ [m]、質量 m [kg]、軸の粘性摩擦係数 C [kg m²/s]
台車
　質量 M [kg]、粘性摩擦係数 B [kg/s]

［手順］

１．数式モデル化
　1.1 運動方程式（課題１）
　1.2 線形化した状態方程式（状態変数を $\mathbf{x}=[x \quad \theta \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}]^T$ とせよ）
　1.3 システム同定
２．制御系の設計とシミュレーション
　2.1 状態フィードバックゲインの設計（極配置、最適レギュレータ）
　2.2 オブザーバの設計
　2.3 シミュレーション

［課題］

SIMULINK での制御対象として、ライブラリ IPEN_LIB の Inv. pendulum を用いる。

ただし、この出力は状態なので、測定できる状態を得るため Matrix Gain をかけること。

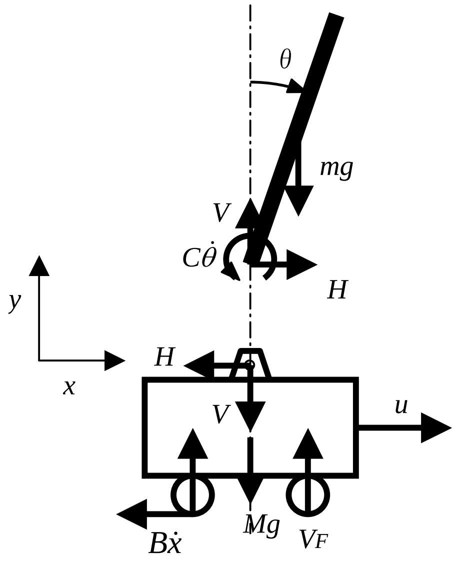
（必要なファイル：IPEN_LIB.LZH をダウンロード後解凍して、全て同じ作業用フォルダに入れておくこと。）

１．l、C、M、B を推定せよ。
　なお、$m=$(学籍番号の 10 の位の数)*0.1　とせよ。ただし、0 のときは $m=1$ とする。
　また、システム方程式の係数行列を求めよ。
２．制御対象の固有値を求めて，安定か不安定かを示せ。
３．可制御性と可観測性を示せ。
４．状態フィードバックゲインを設計せよ（３種類以上)。
５．同一次元オブザーバを設計せよ（３種類以上)。
６．設計した状態フィードバックゲインおよびオブザーバを用いて、制御対象を線形化したモデルでシミュレーションを行い、グラフを描け（設計条件を明記のこと)。シミュレーション結果から、状態フィードバックゲインの違いおよびオブザーバの影響を考察せよ。
７．元の非線形モデルで上記６と同じ条件でシミュレーションを行い、グラフを描き、上記６との違いを考察せよ。

１．数式モデル化

1.1 運動方程式

(1) Newton-Euler の運動方程式



振子（慣性モーメント $J = ml^2/3$）

$$J\ddot{\theta} = Vl\sin\theta - Hl\cos\theta - C\dot{\theta} \qquad (1.1)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(x + l\sin\theta\right) = H \qquad (1.2)$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(l\cos\theta\right) = V - mg \qquad (1.3)$$

台車　$M\ddot{x} = u - B\dot{x} - H$ (1.4)

式(1.1)～(1.4)から、H と V を消去すると

$$\begin{cases} \left(M+m\right)\ddot{x} + ml\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - ml\dot{\theta}^2\sin\theta + B\dot{x} = u \\ ml\cos\theta\cdot\ddot{x} + \left(J+ml^2\right)\ddot{\theta} - ml\,g\sin\theta + C\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

行列表現すると

$$\begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & J+ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -ml\dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ml\,g\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B\dot{x} \\ C\dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\ddot{x}$ と $\ddot{\theta}$ について解くと

$$\begin{cases} \ddot{x} = \left\{\left(J+ml^2\right)\cdot u - B\left(J+ml^2\right)\cdot\dot{x} + Cml\cos\theta\cdot\dot{\theta} + \left(J+ml^2\right)\,ml\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 - m^2l^2g\sin\theta\cos\theta\right\}\Big/\alpha \\ \ddot{\theta} = \left\{-ml\cos\theta\cdot u + Bml\cos\theta\cdot\dot{x} - C\left(m+M\right)\cdot\dot{\theta} - m^2l^2\sin\theta\cos\theta\cdot\dot{\theta}^2 + \left(m+M\right)\,ml\,g\sin\theta\right\}\Big/\alpha \end{cases} \qquad (1.5)$$

ただし、$\alpha = J(m+M) + Mml^2 + m^2l^2\sin^2\theta$

(2) Lagrange の運動方程式

運動エネルギー　$K = \left(M\dot{x}^2 + J\dot{\theta}^2 + m\dot{X}^2 + m\dot{Y}^2\right)\Big/2$ (2.1)　$X = x + l\sin\theta,\quad Y = l\cos\theta$

位置エネルギー　$U = mgl\ \cos\theta$ (2.2)

ラグランジュ関数　$L = K - U$ (2.3)

損失エネルギー　$D = \left(B\dot{x}^2 + C\dot{\theta}^2\right)\Big/2$ (2.4)

運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial\dot{x}} = u \qquad (2.5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = 0 \qquad (2.6)$$

式(2.1)～(2.6)を整理すると、式(1.5)となる。

1.2 線形化した状態方程式

平衡点（$x = \theta = \dot{x} = \dot{\theta} = 0$）の近傍で式(1.5)を線形化する。

状態変数を $\boldsymbol{x} = [x\quad\theta\quad\dot{x}\quad\dot{\theta}]^T$ とすると、状態方程式は次式となる。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}u,\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

ただし、

$\alpha_0 = J\left(m+M\right) + Mml^2,\qquad \alpha = m^2l^2/\alpha_0,\qquad J = ml^2/3$

$a_{32} = -m^2l^2g/\alpha_0,\qquad a_{33} = -B\left(J+ml^2\right)/\alpha_0,\qquad a_{34} = Cml/\alpha_0,\qquad a_{35} = \left(J+ml^2\right)\,ml/\alpha_0$

$a_{42} = \left(m+M\right)\,ml\,g/\alpha_0,\qquad a_{43} = Bml/\alpha_0,\qquad a_{44} = -C\left(m+M\right)/\alpha_0,\qquad a_{45} = -m^2l^2/\alpha_0$

$b_3 = \left(J+ml^2\right)/\alpha_0,\qquad b_4 = -ml/\alpha_0$

1.3 システム同定（パラメータ推定）

(1) 振子

下に垂らして微小な振幅で自由振動を行い、パラメータを推定する。

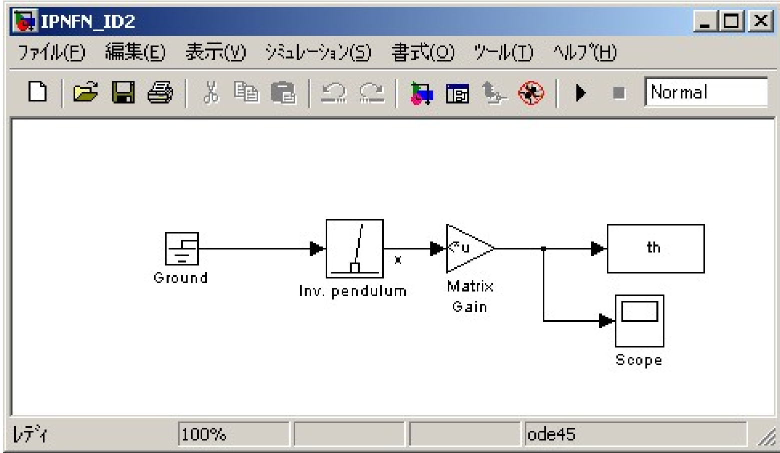
・Inv. pendulum：

ﾊﾟﾗﾒｰﾀ＝ID,[0;th0;0;0],2

(ID=学籍番号下３桁、

初期値=th0：微小量)

・Matrix Gain C：C=[0 1 0 0]



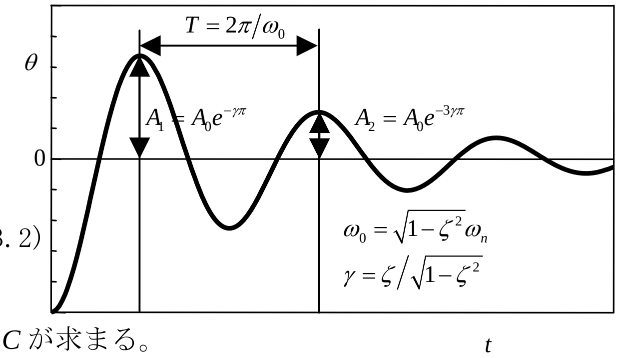
振子運動方程式　$(J+ml^2)\ddot{\theta}+C\dot{\theta}+mgl\sin\theta=0$

線形化　$\ddot{\theta}+2\zeta\omega_n\dot{\theta}+\omega_n^2\theta=0$

ただし、　$\omega_n^2=\frac{mgl}{J+ml^2},\ 2\zeta\omega_n=\frac{C}{J+ml^2}$　(3.1)

自由応答　$\theta(t)=\frac{\theta_0}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t-\phi)$

自由応答波形より　$\omega_n=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}T},\ \zeta=\sqrt{\frac{\beta^2}{4\pi^2+\beta^2}},\ \beta=\ln\frac{A_2}{A_1}$　(3.2)



$J=ml^2/3$として、mが測定できれば（$g=9.8$）、

測定したA_1,A_2,Tを用いて、式(3.1),(3.2)より、l、Cが求まる。

(2) 台車

位置フィードバックを行い、パラメータを推定する。

・Inv. pendulum：

ﾊﾟﾗﾒｰﾀ＝ID,[0;0;0;0],1

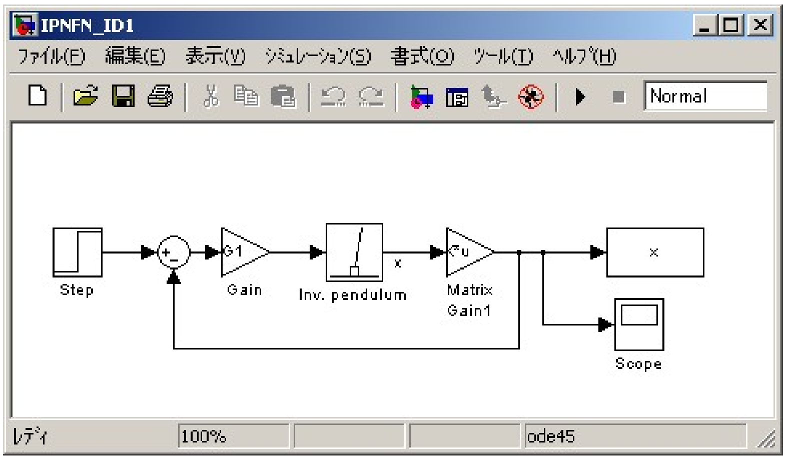
(ID=学籍番号下３桁、初期値=0)

・Matrix Gain C：C=[1 0 0 0]

・Gain G1：適切に与える

・Step：

ｽﾃｯﾌﾟ時間=0, 初期値=0, 最終値=A0



台車の運動方程式　$M\ddot{x}+B\dot{x}=u$

フィードバック　$u=G_1(r-x)$

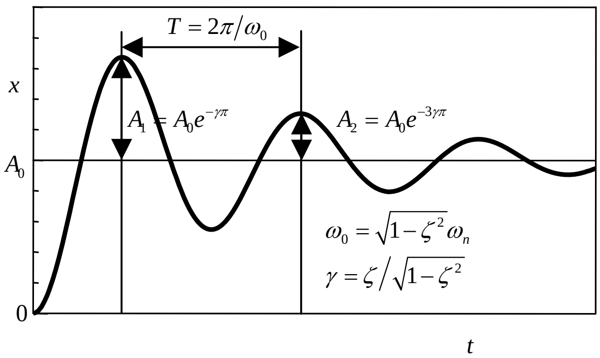
閉ループ系　$M\ddot{x}+B\dot{x}+G_1x=G_1r$

整理すると　$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=\omega_n^2r$

ただし、　$\omega_n^2=G_1/M,\ 2\zeta\omega_n=B/M$　(3.3)

ステップ応答

$$x(t)=A_0(1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}})e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t-\phi)$$



ステップ応答波形より　$\omega_n=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}T},\ \zeta=\sqrt{\frac{\beta^2}{4\pi^2+\beta^2}},\ \beta=\ln\frac{A_2}{A_1}$　(3.4)　(式(3.2)と同じ)

測定したA_1,A_2,Tを用いて、式(3.3),(3.4)より、M、Bが求まる。

その他、フィルタを通すなりして得られた時系列データから最小２乗法などにより推定する方法もある。

２．制御系の設計とシミュレーション

2.1 状態フィードバックゲインの設計

同定したシステムのパラメータを用いて、極配置または最適レギュレータで、閉ループ極の位置を変えるか、最適レギュレータの重みを変えて、状態フィードバックゲインを３種類以上求める。

（TMP_IPEN.M 参照）

2.2 オブザーバの設計

オブザーバの極を 3 種類以上変えて、オブザーバゲインを求める。

2.3 シミュレーション

(1) SIMULINK パラメータ設定

(a) 制御対象

・Inv. pendulum：ﾊﾟﾗﾒｰﾀ＝ID, x0, sw

(ID=学籍番号下 3 桁、初期値=x0)

この出力は状態 $\boldsymbol{x}=[x \quad \theta \quad \dot{x} \quad \dot{\theta}]^T$

・Matrix Gain C：

C=[1 0 0 0; 0 1 0 0]は MATLAB で設定

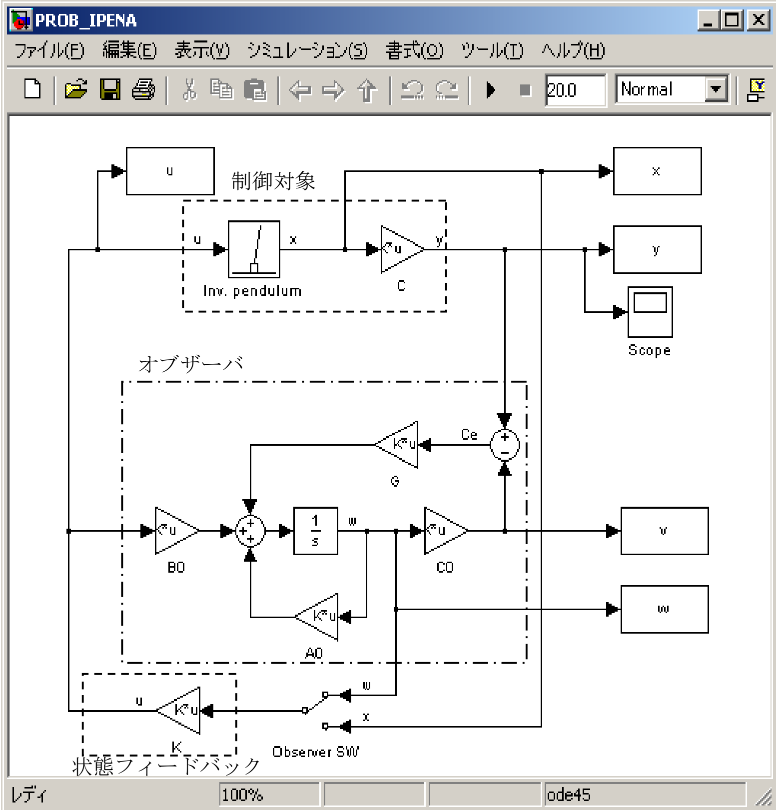
(b) 状態フィードバック

・Matrix Gain K：極配置や最適レギュレータで設計した値

(c) オブザーバ

・Matrix Gain A0, B0, C0：それぞれ線形モデルの A, B, C

・Matrix Gain G：設計したオブザーバのゲイン



MATLAB と SIMULINK による例

(2) シミュレーションと考察

(a) sw=0 として、制御対象を線形化したモデルでシミュレーションを行う。

・状態フィードバックゲインの違い

Observer SW を x 側にする（オブザーバを用いない)。

制御対象の初期値　x0=[0; 0.1; 0; 0]

状態フィードバックゲインを変えてシミュレーションし、違いを考察せよ。

・オブザーバの影響

Observer SW を w 側にする（オブザーバを用いる)。

制御対象の初期値　x0=[0; 0.1; 0; 0]　(前と同じ値)

オブザーバの初期値 w0=[0;　0; 0; 0]　(制御対象の初期値と異なる値)

状態フィードバックゲインを１つ固定し、オブザーバのゲインを変えてシミュレーションし、違いを考察せよ。

(b) sw=-1 として、元の非線形モデルで上記(a)と同じ条件でシミュレーションし、上記との違いを考察せよ。