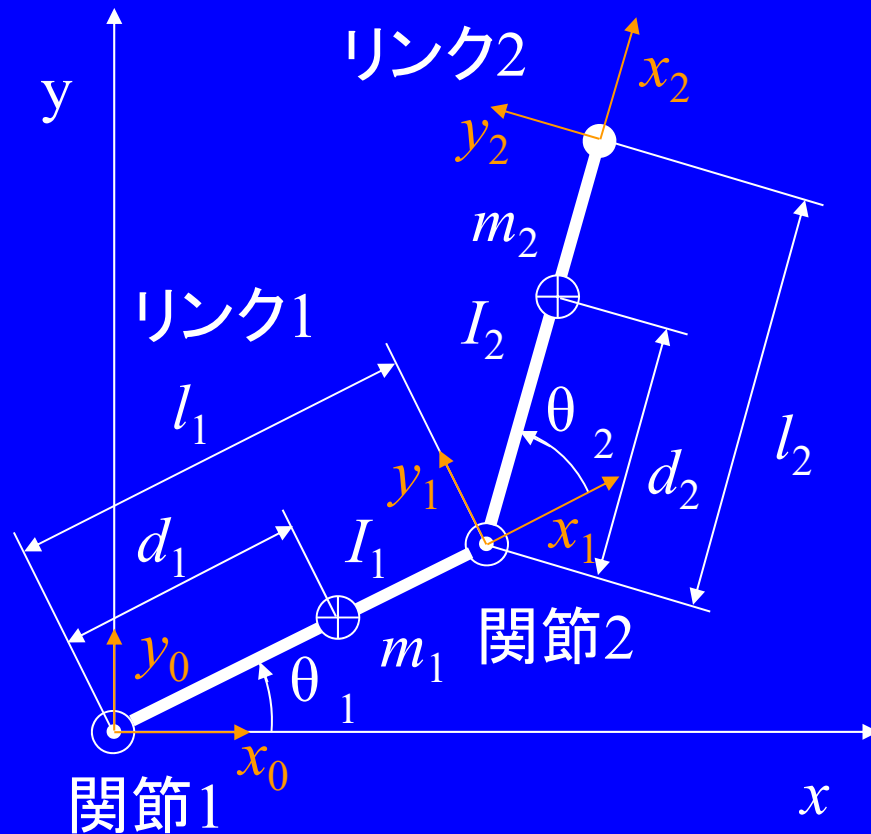


# 2DOF SCARA Robot



$p = [x \ y]^T$  手先位置

$\theta_i$  関節  $i$  の回転角度

$m_i$  リンク  $i$  の質量

$I_i$  リンク  $i$  の重心回りの慣性モーメント

$l_i$  リンク  $i$  の長さ

$d_i$  関節  $i$  からリンク  $i$  の重心までの長さ

$D_i$  関節  $i$  の粘性摩擦係数

$q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$  関節変数

DH表現リンクパラメータ  $d_1 = d_2 = 0, \alpha_1 = \alpha_2 = 0, a_1 = l_1, a_2 = l_2$

# 順運動学 (Direct Kinematics)

座標変換

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & l_1 S_1 + l_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

手先座標  $p = f(q)$ ,  $\dot{p} = J(q)\dot{q}$

$$\begin{aligned} x &= l_1 C_1 + l_2 C_{12} \\ y &= l_1 S_1 + l_2 S_{12} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ヤコビ行列} \\ J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix} \end{array}$$

ただし,  $S_1 = \sin \theta_1$ ,  $C_1 = \cos \theta_1$ ,  $S_2 = \sin \theta_2$ ,  $C_2 = \cos \theta_2$   
 $S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$ ,  $C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

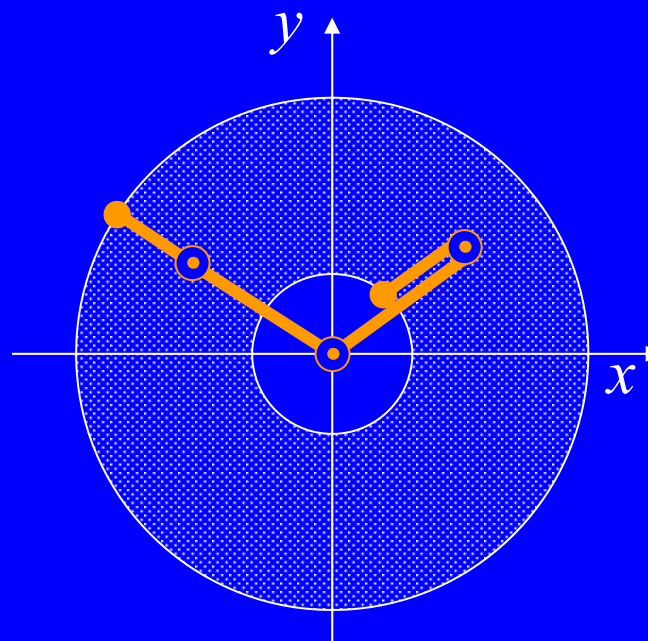
# 特異姿勢 (Singular Configuration)

$\text{rank } J(\mathbf{q}) < \max_q \text{rank } J(\mathbf{q})$  望みの手先速度を出せない

$$\mathbf{p} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad \dot{\mathbf{p}} = J(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} & -l_2 S_{12} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} & l_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

$$\det J(\mathbf{q}) = l_1 l_2 S_2 = 0 \quad \therefore \theta_2 = 0, \pi$$



# 逆運動学

## (Inverse Kinematics)

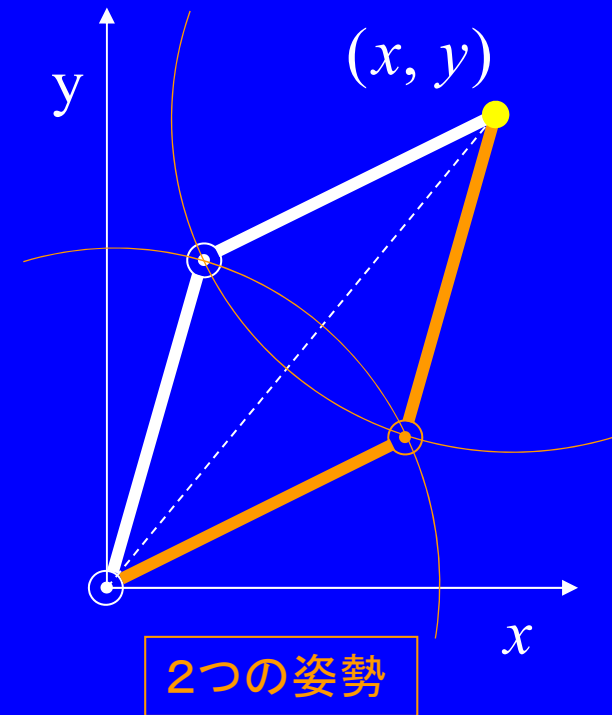
手先座標  $p = [x \ y]^T$

関節角  $q = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \pm \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + L^2 - l_2^2}{2l_1L}\right)$$

$$\theta_2 = \mp \left( \pi - \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - L^2}{2l_1l_2}\right) \right)$$

ただし,  $L = \sqrt{x^2 + y^2}$



原点中心, 半径 $l_1$ の円と, 中心 $(x, y)$ , 半径 $l_2$ の円との交点として, 求めることもできる

# 動力学(その1)

## (Dynamics)

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + D\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})$$

慣性行列

$$M(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} 2M_{12}C_2 + m_{11} & M_{12}C_2 + m_{22} \\ M_{12}C_2 + m_{22} & m_{22} \end{bmatrix}$$

遠心力・コリオリカ

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

重力

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} g_1C_1 + g_2C_{12} \\ g_2C_{12} \end{bmatrix}$$

粘性摩擦係数

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix}$$

関節変数  $\boldsymbol{q} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

入力トルク  $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2]^T$

ただし,

$$M_{12} = m_2 l_1 d_2$$

$$m_{11} = m_1 d_1^2 + m_2 (l_1^2 + d_2^2) + I_1 + I_2$$

$$m_{22} = m_2 d_2^2 + I_2$$

$$g_1 = (m_1 d_1 + m_2 l_1)g$$

$$g_2 = m_2 d_2 g$$

# 動力学(その2)

## (Dynamics)

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \\
 &= \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\underline{\dot{\boldsymbol{q}}} + \boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{q}) \\
 &= \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \underline{\dot{\boldsymbol{q}}}, \ddot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{a}
 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2(\dot{\theta}_2^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\dot{\boldsymbol{q}} \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -M_{12}S_2\dot{\theta}_2 & -M_{12}S_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ M_{12}S_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \text{ は歪対称行列} \quad \boldsymbol{q}^T (\dot{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q}) - 2\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{q} = 0$$

例

$$\boldsymbol{a} = [M_{12} \quad m_{11} \quad m_{22} \quad D_1 \quad D_2 \quad g_1 \quad g_2]^T \quad \text{パラメータ}$$

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \underline{\dot{\boldsymbol{q}}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - S_2\{\dot{\theta}_2\underline{\dot{\theta}_1} + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\underline{\dot{\theta}_2}\} & \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 & C_1 & C_{12} \\ C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1\underline{\dot{\theta}_1} & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 & 0 & C_{12} \end{bmatrix}$$

# 同定(その1)

## (Identification)

(1) 静止試験..一定トルクを与え, 重力と釣合せ, 静止させる

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 C_1 + g_2 C_{12} \\ g_2 C_{12} \end{bmatrix}$$

(2) 運動試験..各関節を固定し, 各軸単独で重力補償+入力を与える ( $q, \dot{q}, \ddot{q}$ が測定可なら, 最小2乗法などを用いる)

(a) 関節1を固定

$$\bar{\tau}_2 = m_{12} \ddot{\theta}_2 + D_2 \dot{\theta}_2$$

(b) 関節2を $0^\circ$  で固定

$$\bar{\tau}_1 = (2M_{12} + m_{11}) \ddot{\theta}_1 + D_1 \dot{\theta}_1$$

(c) 関節2を $90^\circ$  で固定

$$\bar{\tau}_1 = m_{11} \ddot{\theta}_1 + D_1 \dot{\theta}_1$$

等角速度運動を行わせ,  
粘性摩擦係を求めた後,  
角加速度運動を行わせ,  
慣性行列の係数を求める  
方法などもある

# 同定(その2)

## (Identification)

運動方程式  $\tau = \zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q})a$

パラメータ  $a = [M_{12} \quad m_{11} \quad m_{22} \quad D_1 \quad D_2 \quad g_1 \quad g_2]^T$  に関して線形

$$\zeta(q, \dot{q}, \underline{\dot{q}}, \ddot{q}) = \begin{bmatrix} C_2(2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - S_2\{\dot{\theta}_2 \underline{\dot{\theta}}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \underline{\dot{\theta}}_2\} & \ddot{\theta}_1 & \ddot{\theta}_2 & \dot{\theta}_1 & 0 & C_1 & C_{12} \\ C_2\ddot{\theta}_1 + S_2\dot{\theta}_1 \underline{\dot{\theta}}_1 & 0 & \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 & 0 & \dot{\theta}_2 & 0 & C_{12} \end{bmatrix}$$

$q, \dot{q}, \ddot{q}$  が測定可なら, いくつかの時刻で測定を行い, 最小2乗法などを用いて一挙に推定

$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad \text{ここで} \quad A = \begin{bmatrix} \zeta(q(t_1), \dot{q}(t_1), \underline{\dot{q}}(t_1), \ddot{q}(t_1)) \\ \vdots \\ \zeta(q(t_n), \dot{q}(t_n), \underline{\dot{q}}(t_n), \ddot{q}(t_n)) \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \tau(t_1) \\ \vdots \\ \tau(t_n) \end{bmatrix}$$



# 平衡点近傍での線形化 (Linearization)

重力補償をする平衡点  $q_0$  の近傍で線形化

$$\mathbf{x} = [\Delta\theta_1 \quad \Delta\theta_2 \quad \Delta\dot{\theta}_1 \quad \Delta\dot{\theta}_2]^T, \quad \mathbf{u} = [\Delta\tau_1 \quad \Delta\tau_2]^T$$

状態方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -J^{-1}K & -J^{-1}D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ J^{-1} \end{bmatrix} \quad J = M(\mathbf{q}_0), \quad I_2 \text{ は } 2 \times 2 \text{ 単位行列}$$

$$K = - \begin{bmatrix} m_1 g d_1 \sin \theta_{10} + m_2 g \{ l_1 \sin \theta_{10} + d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \} & m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \\ m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) & m_2 g d_2 \sin(\theta_{10} + \theta_{20}) \end{bmatrix}$$

ただし、重力項が無い場合 ( $g(q) = 0$ ) は、 $K = 0$

# 重力補償+PDフィードバック (Gravity Compensation & PD Control)

## 関節角PTP制御

制御則

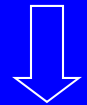
$$\tau = -K_p(q - q_d) - K_d\dot{q} + g(q)$$

$K_p, K_d$  正定対角行列

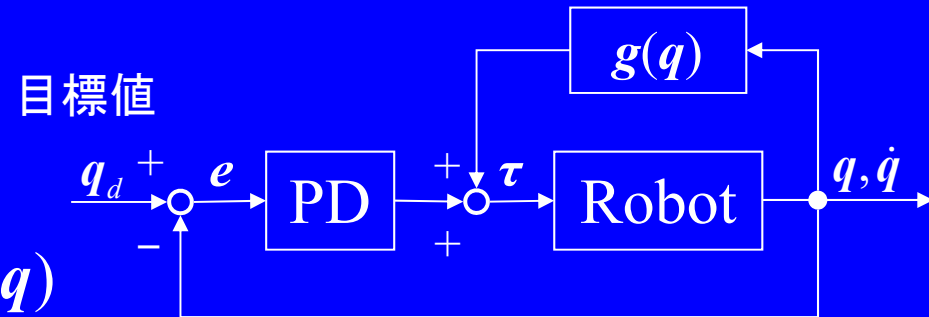
安定性

$$V(t) = \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}^T M(q) \dot{q} + (q - q_d)^T K_p (q - q_d) \right\} > 0$$

$$\dot{V}(t) = -\dot{q}^T (K_d + D) \dot{q} \leq 0 \quad \text{また、}\dot{q} = 0 \text{ の時のみ } \dot{V}(t) = 0$$



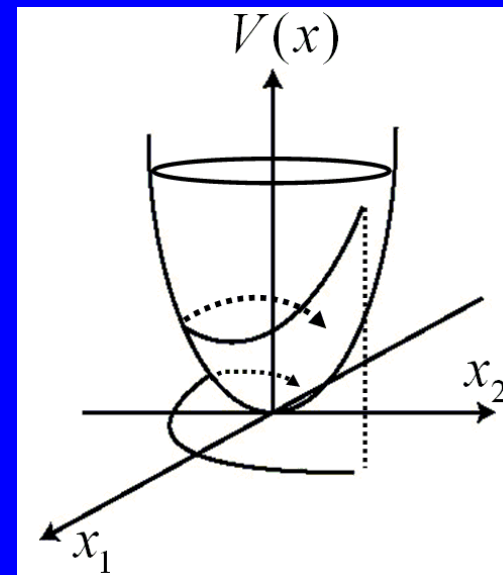
平衡点  $(q_d, 0)$  は漸近安定



# (補) Liapunovの安定判別

## リアプノフ関数

$\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  が連続であり, ベクトル  $\mathbf{x}(t)$  について恒等的に  $V(\mathbf{x}) > 0$  となり, かつ, システムにそっての時間微分が  $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$  となるスカラー関数  $V(\mathbf{x})$



非線形システム  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  の平衡点  $\mathbf{x} = 0$

リアプノフ関数が存在  $\implies$  リアプノフ安定

リアプノフ関数が存在して,  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \implies$  漸近安定

# 状態フィードバック (State Feedback)

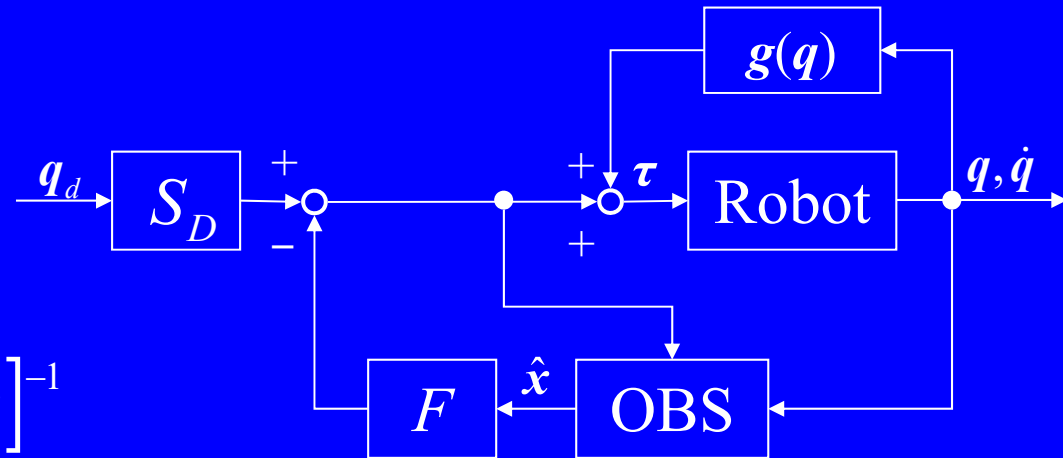
制御則

$$\tau = S_D \mathbf{q}_d - F \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{q})$$

$$S_D = [C(-A + BF)^{-1} B]^{-1}$$

$F$ : 状態フィードバックゲイン

状態が全て得られるならばオブザーバ(OBS)は必要ない



# 動的補償(FF)

## (Inverse Dynamics Method)

### 関節角追従制御

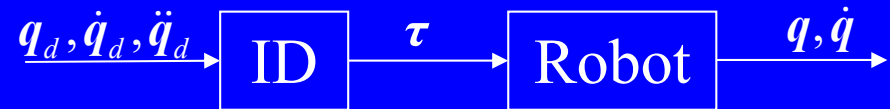
制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d)$$

$$\hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \hat{M}(q)\ddot{q} + \hat{h}(q, \dot{q}) + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q)$$

ID: 逆動力学モデル  
 (“^”は推定値を表す)

目標軌道



誤差  $e = q - q_d$

$$M(q)\ddot{e} + D\dot{e} = \varepsilon_{ff}$$

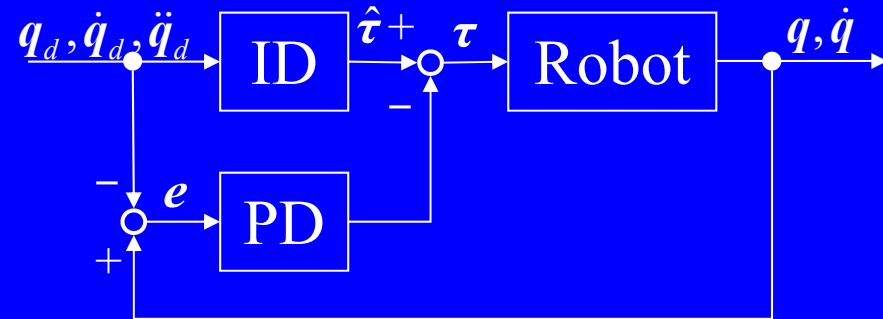
$\varepsilon_{ff}$  パラメータ誤差、軌道誤差など

# 動的補償(FF)+PDフィードバック (Inverse Dynamics & PD Control)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e}$$

$$e = q - q_d$$



誤差

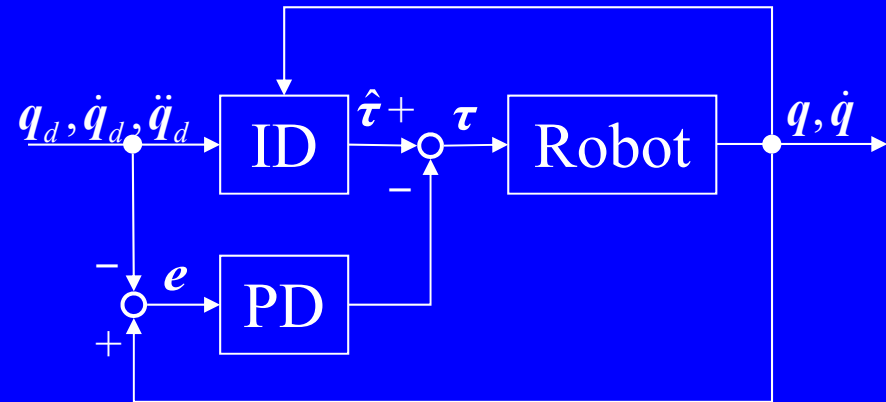
$$M(q)\ddot{e} + (K_d + D)\dot{e} + K_p e = \varepsilon_{fc}$$

# 動的補償(FB)+PDフィードバック (Inverse Dynamics & PD Control)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}_d) - K_p e - K_d \dot{e}$$

$$e = q - q_d$$



誤差

$$M(q)\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = \varepsilon_{bc}$$

# 計算トルク法 (Computed Torque Method)

制御則

$$\tau = \hat{\tau}(q, \dot{q}, \ddot{q}_a)$$

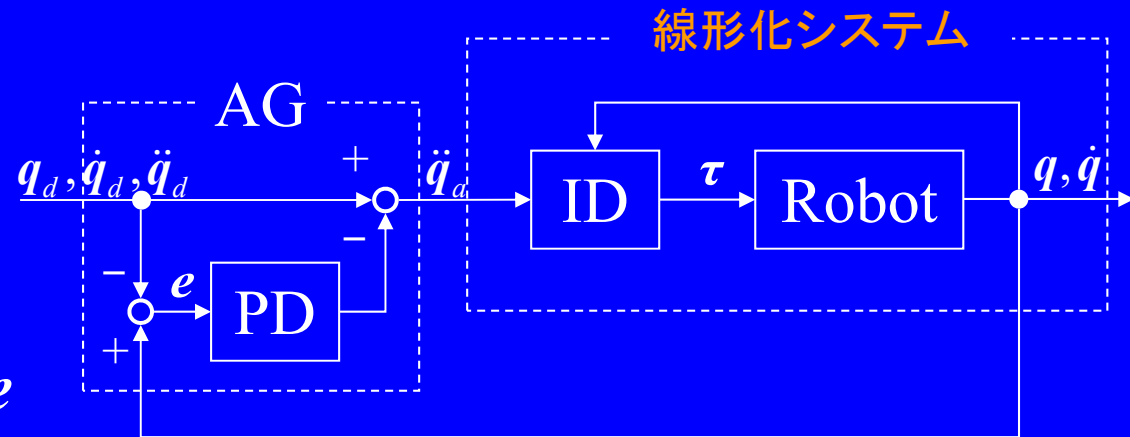
$$\ddot{q}_a = \ddot{q}_d - K_d \dot{e} - K_p e$$

$$e = q - q_d$$

誤差

$$M(q)(\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e) = \varepsilon_{ct}$$

$$\therefore \ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = \bar{\varepsilon}_{ct}$$

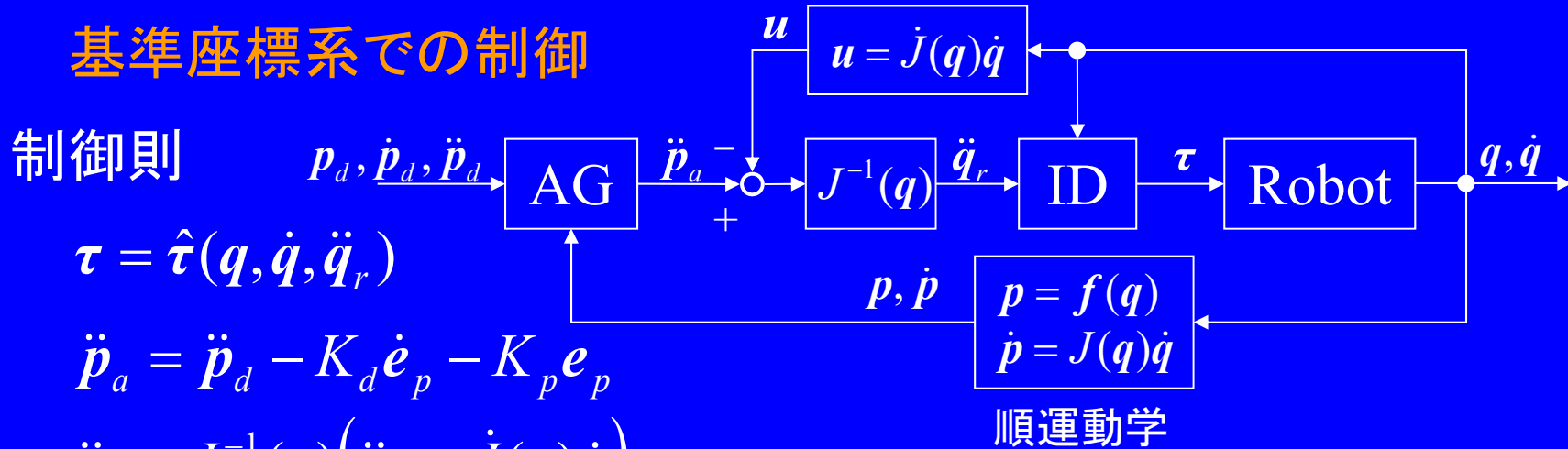


フィードバックによる線形化  
とサーボ補償



# 分解加速度制御 (Resolved Acceleration Control)

基準座標系での制御



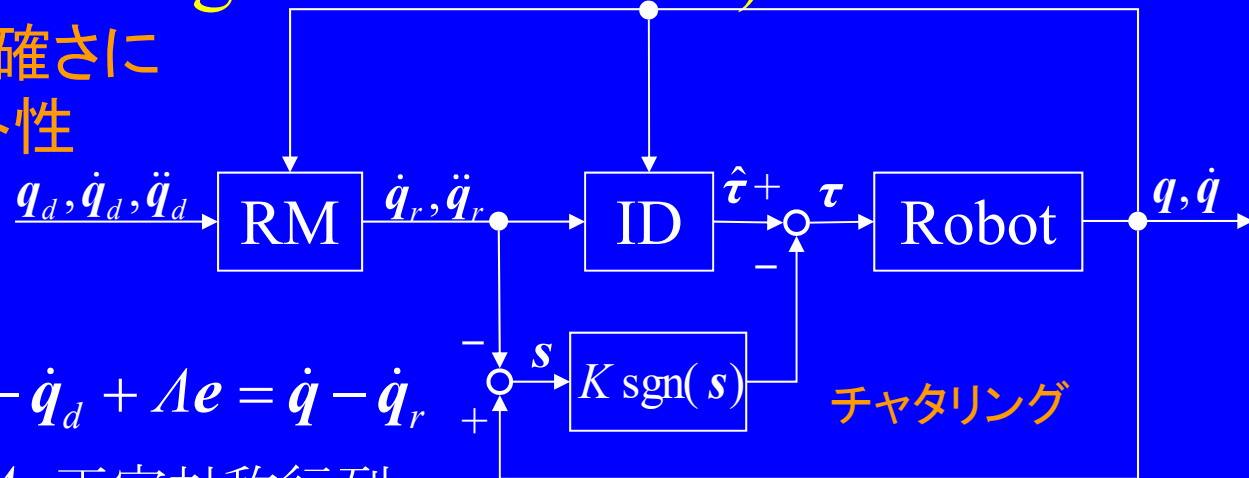
誤差  $e_p = p - p_d$

$$\ddot{e}_p + K_d \dot{e}_p + K_p e_p = \varepsilon_{ra}$$

# スライディングモード制御 (Sliding Mode Control)

モデルの不正確さに  
対するロバスト性

制御則



$$e = q - q_d$$

$$s = \dot{e} + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_d + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_r$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e, \Lambda: \text{正定対称行列}$$

$$\tau = \hat{\tau} - K \operatorname{sgn}(s), \operatorname{sgn}(s): \text{符号関数}, K = \operatorname{diag}(K_i) \quad (\text{VSSの一種})$$

$$\hat{\tau} = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q) = \zeta(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} s^T M(q) s, \quad \dot{V}(t) = s^T \left( \tilde{M}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{D}\dot{q} + \tilde{g}(q) \right) - \sum_{i=1}^n K_i |s_i|$$

$$K_i \geq \left| \left[ \tilde{M}(q)\ddot{q}_r + \tilde{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \tilde{D}\dot{q} + \tilde{g}(q) \right]_i \right| + \eta_i, \quad \eta_i > 0 \text{ ととれば } \dot{V}(t) \leq - \sum_{i=1}^n \eta_i |s_i|$$

$$\text{ただし、} \tilde{M} = \hat{M} - M, \tilde{C} = \hat{C} - C, \tilde{D} = \hat{D} - D, \tilde{g} = \hat{g} - g$$

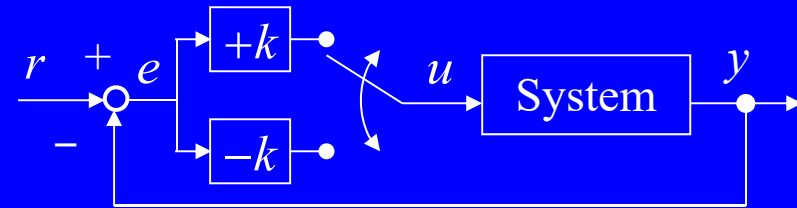
# (補)スライディングモード制御

## 2次系の例

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = ax_2 + u, \quad a > 0$$

$$u = -\phi x_1 \quad k > 0$$

$$\phi = \begin{cases} +k & \sigma(x_1, x_2) > 0 \\ -k & \sigma(x_1, x_2) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma(x_1, x_2) = x_1 S \\ S = \alpha x_1 + x_2 \end{cases}$$

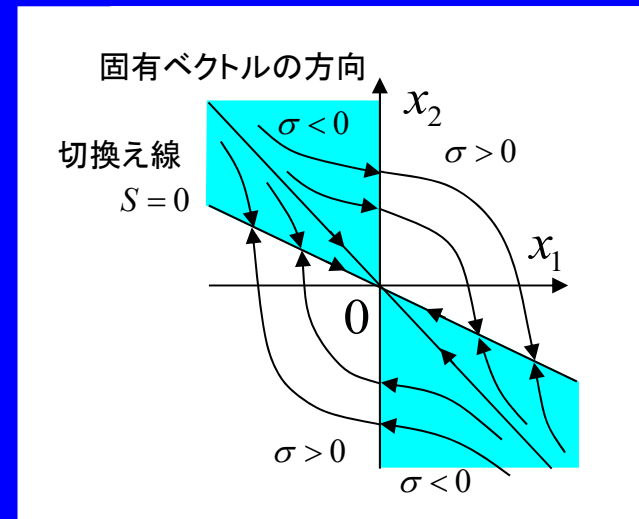


領域I:  $\sigma > 0$  不安定渦状点

領域II:  $\sigma < 0$  固有ベクトル方向のみ安定な鞍形点

ともに不安定であるが、ゲインの切り替えにより安定

切換え線  $S=0$  の傾きが小さいと、切替え線に到達した状態は、この直線上に拘束されて、原点へ向かう

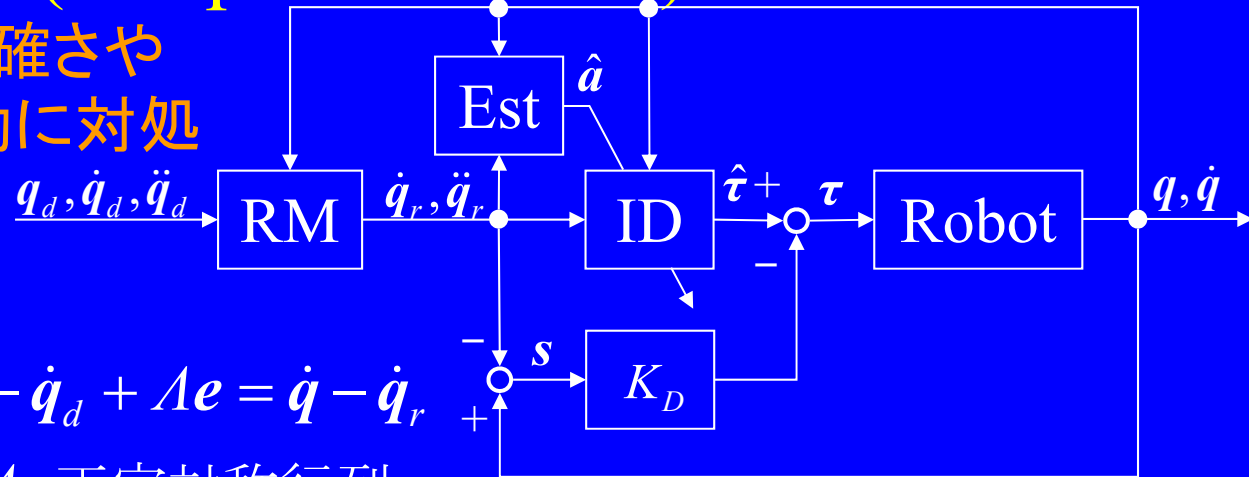


位相面軌道

# 適応制御

(Adaptive Control)

モデルの不正確さや  
パラメータ変動に対処  
制御則



$$e = q - q_d$$

$$s = \dot{e} + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_d + \Lambda e = \dot{q} - \dot{q}_r$$

$$\dot{q}_r = \dot{q}_d - \Lambda e, \Lambda: \text{正定対称行列}$$

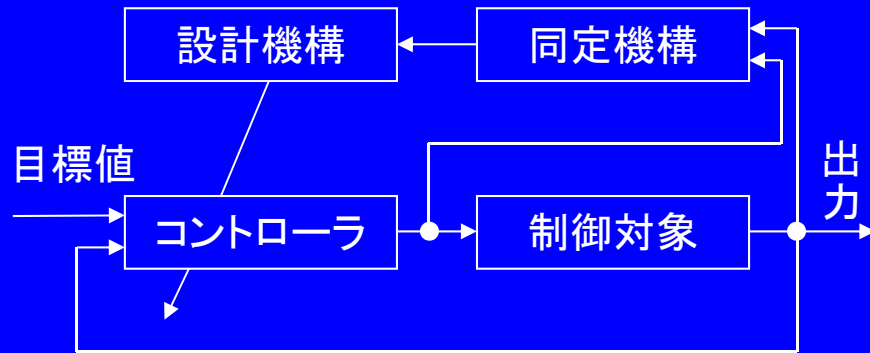
$$\tau = \hat{\tau} - K_D s, K_D: \text{正定対称行列}$$

$$\hat{\tau} = \hat{M}(q)\ddot{q}_r + \hat{C}(q, \dot{q})\dot{q}_r + \hat{D}\dot{q} + \hat{g}(q) = \zeta(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)\hat{a}$$

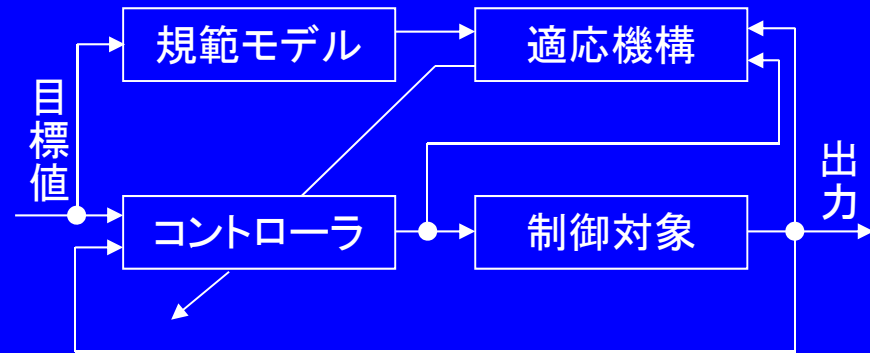
調整則  $\hat{a} = -\Gamma \zeta^T(q, \dot{q}, \dot{q}_r, \ddot{q}_r)s$ ,  $\Gamma$ : 正定対称行列 オンライン推定

$$V(t) = \frac{1}{2} (s^T M(q)s + \tilde{a}^T \Gamma^{-1} \tilde{a}), \quad \dot{V}(t) = -s^T K_D s \leq 0 \quad \text{ただし、} \tilde{a} = \hat{a} - a$$

# (補) 適応制御



セルフチューニング  
コントローラ



モデル規範型  
適応制御